

# Κεφάλαια :

0. Εισαγωγή

1. Διαμετρώσεις

2. Αριθμητικές συνάρτησες

3. Ισοσυνιές

4. Πρωταρχικές ρίζες

5. Κρυπτογραφία

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{R}$$

$$\mathbb{C}$$

## Που χωρίζεται η θεωρία Αριθμών

1. Στοιχειώδης θεωρία Αριθμών

2. Αλγεβρικός Θ.Α.

3. Ανάλυτικός Θ.Α.

4. Διοφαντικός Ανάλυση

5. Αριθμητικός Ανάλυτικός Γεωμετρία

Φυσικοί αριθμοί : περιττοί + άρτιοι

- Περιττοί :  $2n+1, n \in \mathbb{N}_0$

- Άρτιοι :  $2n, n \in \mathbb{N}$

- Τετράγωνοι :  $1, 4, 9, 16, 25, \dots : n^2, n \in \mathbb{N}$

- Κυβικοί :  $1, 8, 27, 64, \dots : n^3, n \in \mathbb{N}$

- Πρώτοι :  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$  (άπληροι, δεν υπάρχει τύπος)

- Συνθετοί :  $4, 6, 8, 9, \dots$  (όλοι οι φυσικοί χωρίς τους πρώτους - άπληροι)

- Τριγωνικοί :  $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots : \frac{n(n+1)}{2}$

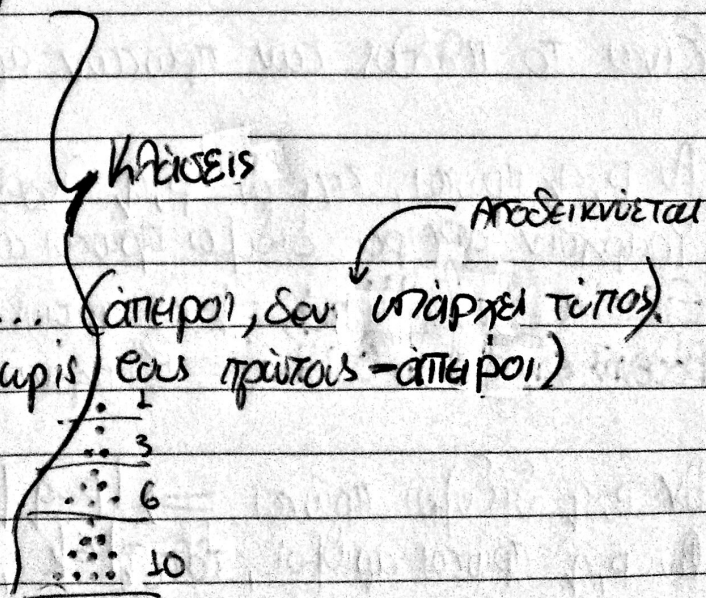
- Τεταίοι :  $6, 28, 496, \dots$

- αριθμοί φιβονατσι :  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$

αποδεικνύεται  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

ΚΑΙΣΕΙΣ

ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ



Τέλειοι αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι είναι ίσοι με το άθροισμα των διαμετρώσεών τους, χωρίς τον εαυτό τους.

Ο μεγαλύτερος τέλειος αριθμός που έχει βρεθεί έχει περισσότερα από 34.000.000 ψηφία.

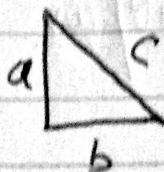
Υπάρχει τύπος για να εύρεση του  $n$ -οστού αριθμού Fibonacci.

## ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

1600 π.Χ. (Βαβυλώνιοι): αν  $a, b \in \mathbb{N}$ , είναι ο αριθμός  $a^2 + b^2$  τριγωνικός αριθμός;

Απάντηση (Πυθαγόρας, 500 π.Χ.): Ναι, υπάρχουν άπειρες τριάδες  $(a, b, c)$

Φυσικών αριθμών:  $a^2 + b^2 = c^2$



(3, 4, 5)  
Πυθαγόρειες τριάδες (5, 12, 13)

Πενικά: υπάρχουν τριάδες  $(a, b, c)$ :  $a^3 + b^3 = c^3$ ; ΟΧΙ (Gauss, Euler) 1820  
 $a^4 + b^4 = c^4$ ; ΟΧΙ (Fermat) 1630  
 $a^n + b^n = c^n$ ,  $n \geq 3$ ; ΟΧΙ (Wiles 1994)  
Τελευταίο θεώρημα του Fermat

Είναι το πλήθος των πρώτων αριθμών άπειρο; ΝΑΙ (Ευκλείδης)

Αν  $p, q$  πρώτοι, τότε οι  $p, q$  λέγονται διδύμοι πρώτοι  $\Leftrightarrow p = q + 2$

Υπάρχουν άπειροι διδύμοι πρώτοι αριθμοί; (Άγνωστο)

Εικασία του Goldbach: κάθε άρτιος  $> 2$  είναι άθροισμα 2 πρώτων (Άγνωστο)

Αδελφική εικασία του Goldbach: "περίπου  $> 5$  " "  $3$  " ; (Hallogott-2014) (Άνοιχτό)

Αν  $p, q$  διδύμοι πρώτοι  $\Rightarrow |p - q| = 2$

Αν  $p, q$  πρώτοι αριθμοί,  $|p - q| \leq k$ , τότε πόσοι τέτοιοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν που ικανοποιούν;

Zhang (2013): Υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$ , ώστε το πλήθος των πρώτων  $p, q$ :

$|p - q| \leq k$  είναι άπειρο  $\rightarrow$  70.000.000 αρχικά  
πλέον 600